Correction du contrôle 9
Equations de droites et trigonométrie

Solution de l'exercice 1.

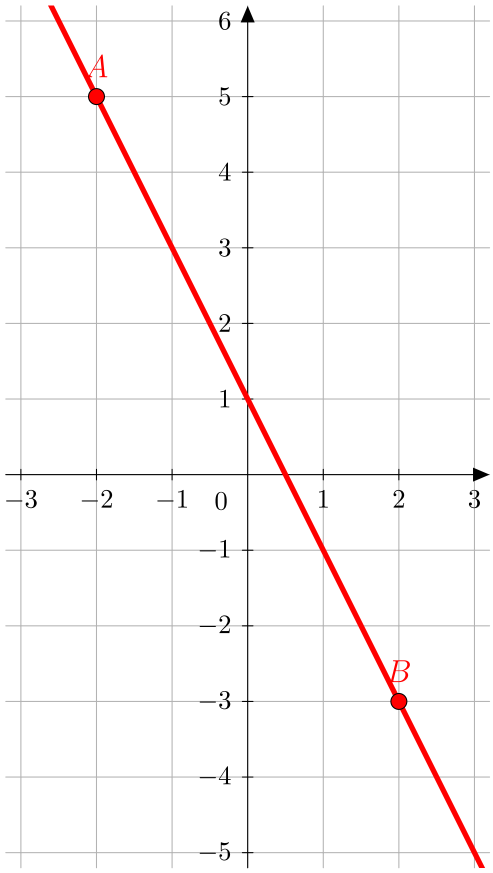
1. D'après la formule du cours, on a

$$\vec{AB} : (x_B - x_A; y_B - y_A) = (2 - (-2); -3 - 5) = (2 + 2; -8) = (4; -8) .$$

2. Naturellement $\vec{AB}\,(4; -8)$ est un vecteur directeur de la droite (AB). Donc d'après le cours la pente de (AB) est donnée par :

$$a = \frac{-8}{4} = -2.$$

3. En plaçant les points A et B et en les reliant, nous obtenons directement la droite (AB).



4. On note alors que la droite (AB) coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0; 1)$. Donc l'ordonnée à l'origine de la droite (AB) vaut $b = 1$. Avec le coefficient directeur calculé à la question 2, on obtient l'équation de la droite (AB) : $y = -2x + 1$.

5. D'après la formule du cours, le pente de la droite (AC) est donnée par :

$$a' = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-39 - 5}{20 - (-2)} = \frac{-44}{20 + 2} = \frac{-44}{22} = \frac{-22 \times 2}{22} = -2.$$

6. On observe que la pente de (AB) est égale à la pente de (AC) : $a = a'$. Ces deux droites sont donc parallèles et les points A, B et C sont alignés.

Solution de l'exercice 2.

1. Le sens trigonométrique est un sens de rotation qui est contraire au sens des aiguilles d'une montre.
2. Par lecture des graduations sur le cercle trigonométrique, nous avons
$$a = \frac{\pi}{3}, \qquad b = \frac{3\pi}{4}, \qquad c = -\pi, \qquad d = \frac{11\pi}{6}.$$
3. Pour x, on observe que $7\pi = \pi + 3 \times 2\pi$ donc après deux tours et demi nous revenons à la graduation π. En ce qui concerne y, on observe que $y + 2\pi = -\frac{5\pi}{4} + 2\pi = -\frac{5\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$. Donc si nous partons de y que l'on fait un tour complet (dans le bon sens) on retombe sur la graduation $\frac{3\pi}{4}$. Donc y et $\frac{3\pi}{4}$ sont à la même graduation.

Solution de l'exercice 3.

1. Puisque le client loue la voiture pour trois jours et parcourt 200 km, par la formule 1, on obtient un prix de
$$y_1 = 3 \times 92 + 0,14 \times 200 = 276 + 28 = 304\,€.$$
2. Pour la formule 2, nous avons un prix de
$$y_2 = 3 \times 52 + 0,3 \times 200 = 156 + 30 = 186\,€.$$
3. On note que $y_2 < y_1$. Donc la formule 2 est dans ce cas plus avantageuse.
4. S'il parcourt 800 km, le prix de la formule 1 est alors de
$$y_1' = 3 \times 92 + 0,14 \times 800 = 276 + 112 = 388\,€$$
et pour la formule 2,
$$y_2' = 3 \times 52 + 0,3 \times 800 = 156 + 240 = 396\,€.$$
On observe cette fois-ci que $y_1' < y_2'$ et que donc la formule 1 est plus avantageuse que la formule 2.
5. Si $x = 0$, c'est-à-dire si le client ne parcourt aucun kilomètre lors de sa location (peut-être la voiture a-t-elle juste servi de pot de fleur...) alors son prix avec la formule 1 sera de $y = 3 \times 92 = 276$. Donc la droite d passe par le point de coordonnées $(0; 216)$. De la même façon, si le client parcourt 100 km, son prix sera alors de $y = 276 + 0,14 \times 100 = 276 + 14 = 290$ et donc le point $(100, 290)$ est aussi sur la droite d_1.
6. Si $x = 0$, nous avons vu à la question précédente que $y = 276$. L'ordonnée à l'origine est donc de $b_1 = 276$.
7. A l'aide des coordonnées de A et B, on obtient le coefficient directeur de $d_1 = (AB)$.
$$a_1 = \frac{290 - 276}{100 - 0} = \frac{14}{100} = 0,14.$$
On en déduit que la droite d_1 a pour équation $y = 276 + 0,14x$.

8. On note dans l'équation précédente que l'ordonnée à l'origine correspond à la facture des jours de location tandis que le coefficient directeur est le prix facturé par kilomètre. Selon cette analyse, on obtient l'équation de la droite d_2 : $y = 0,3x + 52 \times 3 = 0,3x + 156$.
9. Nous avons vu dans les questions précédentes que le coefficient directeur d_1 est $a_1 = 0,14$ tandis que le coefficient directeur de $a_2 = 0,3$. Ces deux coefficients sont distincts $a_1 \neq a_2$ donc les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles et donc sont sécantes.
10. Soit $M\,(x_M; y_M)$ l'unique point d'intersection de d_1 et d_2. Nous avons par appartenance à ces deux droites les équations suivantes :

$$\begin{cases} y_M &= 0,14x_M + 276 \\ y_M &= 0,3x_M + 156 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M &= 0,14x_M + 276 \\ 0,14x_M + 276 &= 0,3x_M + 156 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_M &= 0,14x_M + 276 \\ 276 - 156 &= 0,3x_M - 0,14x_M \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_M &= 0,14x_M + 276 \\ 120 &= 0,16x_M \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_M &= 0,14x_M + 276 \\ x_M &= \frac{120}{0,16} = \frac{12000}{16} = \frac{6000}{8} = 750 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_M &= 0,14 \times 750 + 276 \\ x_M &= 750 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_M &= 105 + 276 \\ x_M &= 750 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_M &= 381 \\ x_M &= 750 \end{cases}$$

Donc les coordonnées du point d'intersection M sont $(750; 381)$.

11. Le point M correspond au moment où la droite d_2 rattrape la droite d_1, où les deux tarifs sont égaux. Avant M (pour des abscisses ou encore des kilomètres inférieurs à x_M), la formule 2 est plus avantageuse alors qu'après le point M (pour des abscisses, des kilomètres supérieurs à x_M) la formule 1 devient plus avantageuse.